

9.1.9 Kombinace II

Předpoklady: 9108

Př. 1: Je dána pěti prvková množina: $M = \{a; b; c; d; e\}$. Vypiš všechny dvoučlenné kombinace sestavené z těchto pěti prvků. Urči počet kombinací pomocí vzorce.

Vypisujeme kombinace přehledně od a :

$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}$

$\{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}$

$\{c, d\}, \{c, e\}$

$\{d, e\} \Rightarrow 10$ kombinací.

Počet kombinací pomocí vzorce: $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = 10 \Rightarrow$ odpovídá.

Každá kombinace prvků z množiny M je její podmnožinou. Vytvořením k -členné kombinace rozdělíme prvky množiny M na dvě skupiny:

- prvky, které jsme vybrali do kombinace (je jich k),
- prvky, které jsme do ní nevybrali (je jich $n - k$).

Tato druhá skupina je také kombinací z n prvků a to $n - k$ člennou $\Rightarrow$ v našem konkrétním případě, tedy kromě dvoučlenných kombinací, vytváříme i kombinace tříčlenné (zbytky).

$\{a, b\}$	$\{c, d, e\}$
$\{a, c\}$	$\{b, d, e\}$
$\{a, d\}$	$\{a, b, e\}$
$\{a, e\}$	$\{b, c, d\}$
$\{b, c\}$	$\{a, d, e\}$
$\{b, d\}$	$\{a, c, e\}$
$\{b, e\}$	$\{a, c, d\}$
$\{c, d\}$	$\{a, b, e\}$
$\{c, e\}$	$\{a, b, d\}$
$\{d, e\}$	$\{a, b, c\}$

$\Rightarrow$ Obou kombinací musí být stejně $\Rightarrow$ platí: $K_k(n) = K_{n-k}(n)$ nebo-li $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Pro všechna nezáporná čísla $n, k, n \geq k$, platí: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Větu snadno dokážeme i dosazením do faktoriálového vyjádření:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{[n-(n-k)]! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-n+k)! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Př. 2: Urči, kolika způsoby je možné vybrat z mariášových karet:

- a) tři karty, b) tři karty červené barvy,
c) tři karty stejné hodnoty.

a) tři karty

Vybíráme tři karty ze 32, nezáleží na tom, kterou vybereme jako první $\Rightarrow$ sestavujeme

tříčlenné kombinace ze 32 $\Rightarrow K_3(32) = \binom{32}{3} = 4\,960$ možností.

b) tři karty červené barvy

Opět vybíráme tři karty, ale tentokrát pouze z osmi červených, nezáleží na pořadí $\Rightarrow$

sestavujeme tříčlenné kombinace z 8 $\Rightarrow K_3(8) = \binom{8}{3} = 56$ možností.

c) tři karty stejné hodnoty

Nejdříve určíme počet možností, jak vybrat například tři krále:

Vybíráme tři karty ze čtyř králů, nezáleží na pořadí $\Rightarrow$ sestavujeme tříčlenné kombinace ze 4

$\Rightarrow K_3(4) = \binom{4}{3} = 4$ možností.

V mariášových kartách máme osm různých hodnot $\Rightarrow$ 8 možností jak vybrat hodnotu, pro každou hodnotu 4 možnosti jak vybrat karty, kombinujeme navzájem $\Rightarrow$ celkem $8 \cdot 4 = 32$ možností.

Př. 3: Urči, kolika způsoby je možné na šachovnici 8x8 vybrat:

- a) trojici políček, b) trojici políček neležících v jednom sloupci,
c) trojici políček neležících v jednom sloupci ani v jedné řadě,
d) trojici políček, která nemají stejnou barvu.

a) trojici políček

Vybíráme tři políčka ze 64, nezáleží na pořadí vybrání (záleží pouze na tom, která políčka

jste vybrali) $\Rightarrow$ sestavujeme tříčlenné kombinace ze 64 $\Rightarrow K_3(64) = \binom{64}{3} = 41\,664$

možností.

b) trojici políček neležících v jednom sloupci

Přímý výpočet je obtížný (políčka buď leží v různých sloupcích, nebo leží dvě v jednom a třetí v jiném. V druhém případě záleží výběr třetího políčka na výběru předchozích dvou...)

$\Rightarrow$ zvolíme nepřímý postup: určíme počet všech trojic a od něj odečteme počet trojic, které nevyhovují zadání:

- všechny trojice: $\binom{64}{3}$ (předchozí bod),
- trojice políček v jednom konkrétním sloupci $\Rightarrow$ vybíráme z osmi políček tři $\Rightarrow K_3(8) = \binom{8}{3}$, na šachovnici je osm sloupců $\Rightarrow$ v osmi sloupcích je $8 \cdot \binom{8}{3}$ možností, jak vybrat tři políčka v jednom sloupci,

trojice políček neležících v jednom sloupci: $\binom{64}{3} - 8 \cdot \binom{8}{3} = 41\,216$.

c) trojici políček neležících v jednom sloupci ani v jedné řadě

Podobné jako v předchozím bodě, kromě trojic v jednom sloupci musíme odečíst i trojice

v jednom řádku (opět $8 \cdot \binom{8}{3}$ možností) $\Rightarrow$ celkem:

$$\binom{64}{3} - 8 \cdot \binom{8}{3} - 8 \cdot \binom{8}{3} = \binom{64}{3} - 16 \cdot \binom{8}{3} = 40\,768 \text{ možností.}$$

d) trojici políček, která nemají stejnou barvu

Přímý postup: na šachovnici jsou dvě barvy $\Rightarrow$ z vybraných políček budou dvě bílá a jedno černé (nebo obráceně):

- vybíráme dvě bílá políčka $\Rightarrow$ vybíráme dvě z 32 $\Rightarrow \binom{32}{2}$ možností,
- vybíráme černé políčko $\Rightarrow$ 32 možností,

možnosti navzájem kombinujeme $\Rightarrow$

- na výběr dvou bílých a jednoho černého políčka máme $\binom{32}{2} \cdot 32$ možností,
- na výběr dvou černých a jednoho bílého políčka máme $\binom{32}{2} \cdot 32$ možností,

$$\text{celkově } \binom{32}{2} \cdot 32 + \binom{32}{2} \cdot 32 = 2 \cdot 32 \cdot \binom{32}{2} = 64 \cdot \binom{32}{2} = 31\,744 \text{ možností.}$$

Nepřímý postup:

- všechny trojice: $\binom{64}{3}$,
- trojice bílých políček $\Rightarrow$ vybíráme tři z 32 bílých políček $\Rightarrow K_3(32) = \binom{32}{3}$,
- trojice černých políček $\Rightarrow$ vybíráme tři z 32 černých políček $\Rightarrow K_3(32) = \binom{32}{3}$,

$$\Rightarrow \text{políčka, která nemají stejnou barvu: } \binom{64}{3} - \binom{32}{3} - \binom{32}{3} = \binom{64}{3} - 2 \cdot \binom{32}{3} = 31\,744$$

možností.

Dodatek: Bod b) v předchozím příkladu se dá řešit přímo takto: trojici políček neležících v jednom sloupci můžeme získat dvěma způsoby:

každé políčko leží ve vlastním sloupci $\Rightarrow$ první políčko můžeme vybrat 64

způsoby, druhé 56 (mimo políčka ve sloupci, kde jsme vybrali první políčko), třetí

48 způsobů (bez políček ve sloupcích obsazených v předchozích krocích), protože

nezáleží, které z políček jsme vybrali jako první, které jako druhé a které jako třetí,

$$\text{dělíme výsledek } 3! \Rightarrow \text{celkem } \Rightarrow \frac{64 \cdot 56 \cdot 48}{3!} = 28\,672 \text{ možností,}$$

dvě políčka leží v jednom sloupci a jedno políčko v jiném $\Rightarrow$ první políčko

můžeme vybrat 64 způsoby, druhé 7 (pouze políčka ve stejném sloupci, kde jsme

vybrali první políčko), třetí 56 způsobů (bez políček ve sloupci obsazeném

v prvním kroku), protože nezáleží, které z prvních dvou políček jsme vybrali jako první, které jako druhé, dělíme výsledek $2! \Rightarrow$ celkem $\Rightarrow \frac{64 \cdot 7 \cdot 56}{2!} = 12\,544$

možností

celkem tedy: $\frac{64 \cdot 56 \cdot 48}{3!} + \frac{64 \cdot 7 \cdot 56}{2!} = 28\,672 + 12\,544 = 41\,216$ (stejný výsledek

jako při výpočtu v řešení příkladu).

Pokud se někdo pokusí řešit příklad tímto způsobem, většinou ztroskotá na jmenovateli druhého zlomku, kam napíše $3!$ (jako by bylo možné prohazovat všechna tři políčka mezi sebou, což nejde protože zatímco první dvě políčka ve společném sloupci jsou zaměnitelné, třetí je v jiném postavení a prohodit s nimi nejde).

Dodatek: První verzi výsledku v bodě d) předchozího příkladu $64 \cdot \binom{32}{2}$ můžeme také

interpretovat takto: na výběr prvního políčka máme 64 možností a pak vybíráme dvě políčka ze 32 políček druhé barvy.

Př. 4: Urči, kolika způsoby je možné na šachovnici 8×8 rozestavit:

a) čtyři pěšce stejné barvy, b) pěšce, střelce, věž a královnu,

c) dva bílé a dva černé pěšce.

Šachovnice je prázdná a při rozestavování nedodržujeme pravidla hry (například bílého pěšce můžeme umístit i na černé políčko).

a) čtyři pěšce stejné barvy

Na šachovnici rozestavujeme čtyři stejné figury $\Rightarrow$ nezáleží na tom, na které z políček jsme postavili figurku jako první, nezáleží na pořadí, ve kterém jsme políčka vybrali $\Rightarrow$

$$K_4(64) = \binom{64}{4} = 635\,376 \text{ možností.}$$

b) pěšce, střelce, věž a královnu

Na šachovnici rozdělujeme čtyři různé figury $\Rightarrow$ záleží na tom, na které z políček jsme postavili figurku jako první (na prvním políčku je pěšec, který už nemůže být na žádném z později vybraných políček) $\Rightarrow$ vybíráme čtyři políčka ze 64, záleží na pořadí $\Rightarrow$

$$V_4(64) = \frac{64!}{60!} = 15\,249\,024 \text{ možností.}$$

c) dva bílé a dva černé pěšce

Rozestavujeme postupně:

- rozestavujeme dva bílé pěšce $\Rightarrow$ nezáleží na pořadí (jsou oba stejní) $\Rightarrow$ vybíráme dvě políčka ze 64 $\Rightarrow K_2(64) = \binom{64}{2}$,
- rozestavujeme dva černé pěšce $\Rightarrow$ nezáleží na pořadí (jsou oba stejní) $\Rightarrow$ vybíráme dvě políčka ze 62 (dvě políčka jsou obsazena bílými pěšci) $\Rightarrow K_2(62) = \binom{62}{2}$,

možnosti rozestavení bílých a černých pěšců spolu můžeme navzájem kombinovat $\Rightarrow$

$$\text{celkově } \binom{64}{2} \cdot \binom{62}{2} = 3812\,256 \text{ možností.}$$

Př. 5: Někteří studenti při řešení předchozího příkladu 4 c) získají špatný výsledek

$2 \cdot \binom{64}{2} \cdot \binom{62}{2}$, který zdůvodňují tím, že máme dvě možnosti, jak vybrat barvu pěšců, které budeme rozestavovat jako první. Proč je tato argumentace nesprávná?

V příkladu 4 rozestavujeme pěšce po šachovnici. Jde nám o to, abychom získali rozestavení figur na šachovnici. Rozlišovat barvu pěšců, které jsme rozestavovali jako první, bychom museli v případě, že by existovalo takové rozestavení pěšců, které bychom nezískali v případě, že začneme s bílými. Takové rozestavení ale neexistuje. V rozestavení pěšců nehraje roli, kdy jsme je na šachovnici postavili, proto také nezáleží na tom, které pěšce rozestavujeme jako první.

Př. 6: V rovině je dáno n bodů, z nichž p leží na jedné přímce. Kromě těchto p bodů žádné další tři body na jedné přímce neleží. Urči, kolik je těmito body určeno:

a) přímek, b) trojúhelníků, c) kružnic.

a) přímek

Přímka je dána dvěma body, nezáleží na pořadí, ve kterém je vybereme, takových dvojic můžeme z n bodů sestavit $\binom{n}{2}$.

Ne všechny tyto dvojice určují nové přímky, protože p bodů leží na přímce $\Rightarrow$ všechny přímky sestavené z těchto bodů splývají v jedinou, z p bodů bychom sestavili $\binom{p}{2}$ přímek,

$\Rightarrow$ celkem sestavíme $\binom{n}{2} - \binom{p}{2} + 1$ přímek.

b) trojúhelníků

Trojúhelník je určen třemi body, které neleží v přímce, nezáleží na pořadí, ve kterém je vybereme, takových trojic můžeme z n bodů sestavit $\binom{n}{3}$.

Ne všechny tyto trojice určují trojúhelníky, protože p bodů leží na přímce $\Rightarrow$ z p bodů bychom sestavili $\binom{p}{3}$ trojic, které neurčují trojúhelník.

$\Rightarrow$ Celkem sestavíme $\binom{n}{3} - \binom{p}{3}$ trojúhelníků.

c) kružnic

Kružnice je stejně jako trojúhelník určena třemi body, ale na rozdíl od trojúhelníků se tak snadno nedá zjistit, zda na jedné kružnici neleží více bodů. Může se stát, že na kružnici určené trojicí bodů leží i další bod, který samozřejmě neleží na trojúhelníku určeném původními body $\Rightarrow$ počet kružnic je stejný nebo menší než počet trojúhelníků, více o něm tvrdit nemůžeme.

Př. 7: Petáková:

strana 147/cvičení 64 b) c) d) e) f)

Shrnutí: Pro kombinační čísla platí: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.